Cauchy's proof of the inequality of arithmetic and geometric means

Ref: Cauchy, Augustin-Louis (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique, première partie, Analyse algébrique*, pp 457-9.

Théorème. La moyenne géométrique entre plusieurs nombres $A, B, C, D, \ldots$ est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.

Theorem. The geometric mean between several numbers $A, B, C, D, \ldots$ is always less than the arithmetic mean.

Démonstration. Soit n le nombre des lettres $A, B, C, D, \ldots$. Il suffira de prouver qu'on à généralement

Demonstration. Let n be the number of letters $A, B, C, D, \ldots$. It will suffice to prove that in general

$$\sqrt[n]{ABCD\ldots} < \frac{A+B+C+D+\ldots}{n} \tag{35}$$

ou, ce qui revient au meme,

or, what amounts to the same,

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n. \tag{36}$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n = 2$,

Now, in the first case, we obviously have, for $n = 2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2;$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n = 4, n = 8$, &c..., enfin $n = 2^m$,

and it can be concluded, taking successively $n = 4, n = 8$, &c..., up to $n = 2^m$,

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4$$

$$< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

&c ....

$$ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}. \tag{37}$$

En second lieu, if n n'est pas un terme de la progression geometrique,

In the second case, if n is not a term of the geometric progression

$$2, \quad 4, \quad 8, \quad 16, \quad \&c\ldots,$$

on désignera par 2^m un terme de cette progression superieur a n, et l'on fera,

we denote by 2^m a term of this progression greater than n, and let,

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots}{n};$$

puis, en revenant à la formule (37) et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

then, returning to formula (37) and suppose in the first term of this formula the last $2^m - n$ factors are equal to K, we find

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, en d'autres terms,

or, in other terms,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < K^{2^m}$$

On aura donc par suite

There will therefore be a result

$$ABCD\ldots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{n}\right)^n;$$

ce qu'il fallait démontrer. □

that which was to be demonstrated. □

Corollaire. On conclut généralement de la formule (36)

Corollary. We can conclude in general from the formula (36)

$$A+B+C+D\ldots > n\sqrt[n]{ABCD\ldots}, \tag{38}$$

quel que soit le nombre des lettres $A, B, C, D, \ldots$. Ainsi, par exemple,

regardless of the number of the letters $A, B, C, D, \ldots$. Thus, e.g.

$$\begin{cases} A+B & > 2\sqrt{AB}, \\ A+B+C & > 3\sqrt[3]{ABC}, \\ \&c\ldots \end{cases} \tag{39}$$

Translated (if that's the word) by David Ireland, DI Management Services Pty Ltd.
`http://www.di-mgt.com.au/`