COURS D'ANALYSE

DE

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

PRÉLIMINAIRES.

Revue des diverses espèces de quantités réelles que l'on considère, soit en algèbre, soit en trigonométrie, et des notations à l'aide desquelles on les représente. Des moyennes entre plusieurs quantités.

POUR éviter toute espèce de confusion dans le langage et l'écriture algébriques, nous allons fixer dans ces préliminaires la valeur de plusieurs termes et de plusieurs notations que nous emprunterons soit à l'algèbre ordinaire, soit à la trigonométrie. Les explications que nous donnerons à ce sujet sont nécessaires, pour que nous ayons la certitude d'être parfaitement compris de ceux qui liront cet ouvrage. Nous allons indiquer d'abord quelle idée il nous paroît convenable d'attacher à ces deux mots, *nombre* et *quantité*.

Nous prendrons toujours la dénomination de

$$val.\ num.\ (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots)$$
$$= \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)}.\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \ldots)}.$$

Il serait facile d'arriver directement au même résultat.

SCHOLIE 2.e Si dans la formule (31) on pose successivement $n = 2$, $n = 3$, &c...., on en conclura

$$(33)\left\{\begin{array}{l} (a\alpha + a'\alpha')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 = (a^2 + a'^2)(\alpha^2 + \alpha'^2), \\ (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 \\ \qquad = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2), \\ \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

La première des équations précédentes s'accorde avec l'équation (8) du chap. VII [§. 1.er]. La seconde peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$(34)\left\{\begin{array}{l} (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 \\ = (a^2 + a'^2 + a''^2)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) - (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'')^2; \end{array}\right.$$

et sous cette forme elle peut être employée avec avantage dans la théorie des rayons de courbure des courbes tracées sur des surfaces quelconques, ainsi que dans plusieurs questions de mécanique.

Nous terminerons cette note par la démonstration d'un théorème digne de remarque auquel on se trouve conduit en comparant la moyenne géométrique entre plusieurs nombres avec leur moyenne arithmétique. Voici en quoi il consiste.

17.e THÉORÈME. *La moyenne géométrique entre plusieurs nombres A, B, C, D, ... est toujours inférieure à leur moyenne arithmétique.*

DÉMONSTRATION. Soit n le nombre des lettres A, B, C, D, ... Il suffira de prouver qu'on a généralement

$$(35) \qquad \sqrt[n]{ABCD\ldots} < \frac{A+B+C+D\ldots}{n},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(36) \qquad ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D\ldots}{n}\right)^n.$$

Or, en premier lieu, on aura évidemment, pour $n=2$,

$$AB = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2;$$

et l'on en conclura, en prenant successivement $n=4$, $n=8$, &c.... enfin $n=2^m$,

$$ABCD < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4,$$

$$ABCDEFGH < \left(\frac{A+B+C+D}{4}\right)^4 \left(\frac{E+F+G+H}{4}\right)^4$$

$$< \left(\frac{A+B+C+D+E+F+G+H}{8}\right)^8,$$

&c.......................................

$$(37) \qquad ABCD\ldots < \left(\frac{A+B+C+D+\ldots}{2^m}\right)^{2^m}.$$

En second lieu, si n n'est pas un terme de la progression géométrique

$$2, \ 4, \ 8, \ 16, \ \&c\ldots,$$

on désignera par 2^m un terme de cette progression supérieur à n, et l'on fera

$$K = \frac{A+B+C+D+\ldots\ldots}{n};$$

puis, en revenant à la formule (37), et supposant dans le premier membre de cette formule les $2^m - n$ derniers facteurs égaux à K, on trouvera

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < \left[\frac{A+B+C+D+\ldots+(2^m-n)K}{2^m}\right]^{2^m},$$

ou, en d'autres termes,

$$ABCD\ldots K^{2^m-n} < K^{2^m}.$$

On aura donc par suite

$$ABCD\ldots < K^n = \left(\frac{A+B+C+D\ldots}{n}\right)^n;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. On conclut généralement de la formule (36)

$$(38) \qquad A+B+C+D\ldots > n\sqrt[n]{ABCD\ldots},$$

quel que soit le nombre des lettres A, B, C, D, ... Ainsi, par exemple,

$$(39) \qquad \left\{\begin{array}{l} A+B > 2\sqrt{AB}, \\ A+B+C > 3\sqrt[3]{ABC}, \\ \&c\ldots\ldots \end{array}\right.$$